

# Ordonnancement robuste sur machines parallèles avec splitting sous durées opératoires incertaines

Widad Naji

co-encadrée par: Marie-Laure Espinouse et Van-Dat Cung

2<sup>ème</sup> Ecole Jeunes Chercheurs du GdR RO,  
4, 5 et 6 Juillet, 2016, Grenoble, France

- Machines **interchangeables**, et vitesses **différentes**.
- Problème **commun** à plusieurs **applications** :
  - Industrie des semi-conducteurs
    - Aubry 2007, Zhang et al. 2007, Rossi 2010...
  - Industrie du textile
    - Silva and Magalhaes 2006
  - Gestion des arrivées et départs d'avions
    - Kolen and Kroon 1993, Hancerliogullari et al. 2013
  - Mutiproscesseurs
    - Lawler and Labetoulle 1978...

- Minimisation du makespan sur machines parallèles non liées avec jobs splittables.
  - $Rm$  :  $m$  machines non liées traitent  $n$  jobs
    - Durée opératoire d'un job sur une machine dépend du job et de la machine
  - $Split$  : Prémption avec parallélisme autorisé
    - Chaque job peut se décomposer en sous-jobs indépendants
  - $C_{max}$  : Critère makespan
    - Minimiser l'instant de fin de la dernière machine,
    - Equilibrer la charge
- Problème polynomial
  - Solvable par PL (Xing and Zhang 2000)
  - Relaxation du  $Rm/pmtn/C_{max}$  (Lawler and Labetoulle 1978)

Minimiser  $C_{max}$  (1)

S. C.

$$\sum_{i=1}^m \frac{t_{ij}}{p_{ij}} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \leq C_{max} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

~~$$\sum_{i=1}^m t_{ij} \leq C_{max} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$~~

$$t_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

Données :  $p_{ij} = \left(\frac{d_j}{v_{ij}}\right)$  : Durée opératoire nécessaire pour traiter  $j$  entièrement par  $i$

Variables :  $t_{ij}$  durée opératoire de traitement de  $j$  par  $i$ ,  $C_{max}$  makespan

- Demandes **incertaines**:
  - Effets de saisonnalité
  - Changement des besoins du client
  - Concurrence
  - Rebuts
  - Etc..

→ Durées opératoires incertaines

- Minimisation du makespan sur machines parallèles non liées avec jobs splittables avec **données incertaines**

$$\sum_{i=1}^m \frac{t_{ij}}{p_{ij}} = 1$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}$$

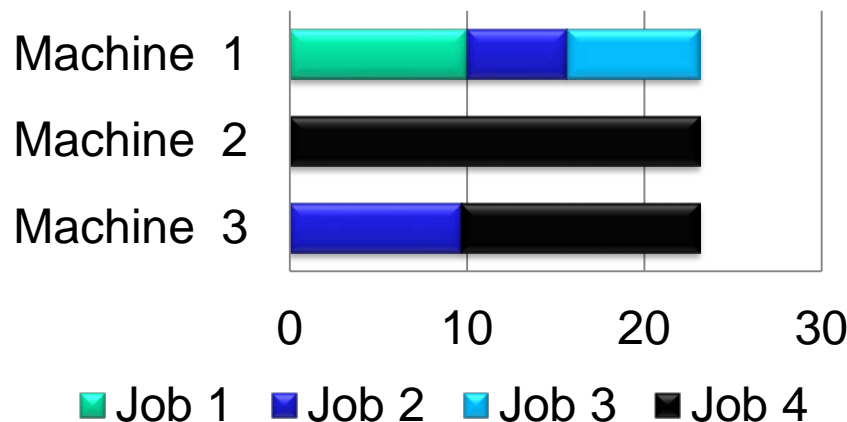
*Contraintes avec données incertaines*

La résolution classique (statique) peut avoir plusieurs limitations !

- Scénario prévisionnel unique des durées opératoires

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=1$	30/3	50/2	30/4	100/1
$i=2$	30/3	50/1	30/3	100/2
$i=3$	30/3	50/4	30/4	100/4

- Ordonnancement optimal du scénario prévisionnel



## Scénario réel

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=1$	50/3	30/2	80/4	50/1
$i=2$	50/3	30/1	80/3	50/2
$i=3$	50/3	30/4	80/4	50/4

- Comment agir?

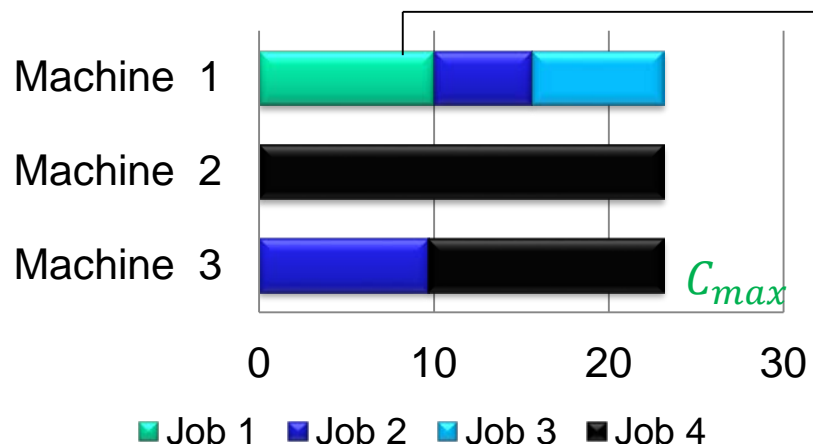
1- Ne rien changer : violer les contraintes !

$$\sum_{i=1}^m \frac{t_{ij}}{p_{ij}} \neq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

2- Garantir au moins la faisabilité (en gardant une stabilité) .



- Ordonnancer selon l'affectation de l'ordo prévisionnel



→  $R =$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0.225 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.46 \\ 0 & 0.775 & 0 & 0.54 \end{bmatrix}$$


**Ordonnancement réel**

- Un ordonnancement **sous optimal**:
  - Dégradation de la performance : Makespan très mauvais.
  - Mauvais équilibrage des charges

- En pratique, les données réelles sont souvent incertaines.
  - L'hypothèse des données certaines est restrictive
  - Les solutions prévisionnelles deviennent infaisables ou sous optimales.
- Intérêt de la problématique de l'ordonnancement avec prise en comptes des incertitudes

# Etat de l'art et positionnement

Il existe différentes approches:

	Ne pas Réagir	Réagir
Ne pas Anticiper		Prédictive-réactive, Réactive
Anticiper	Proactive (Robustesse, Stabilité)	Proactive-Réactive (Robustesse, Stabilité)

Classification des approches d'ordo sous incertitudes (Billaut et al. 05, Herroellen et Leus 2005, etc..)

- Sa performance est peu sensible à l'incertitude des données

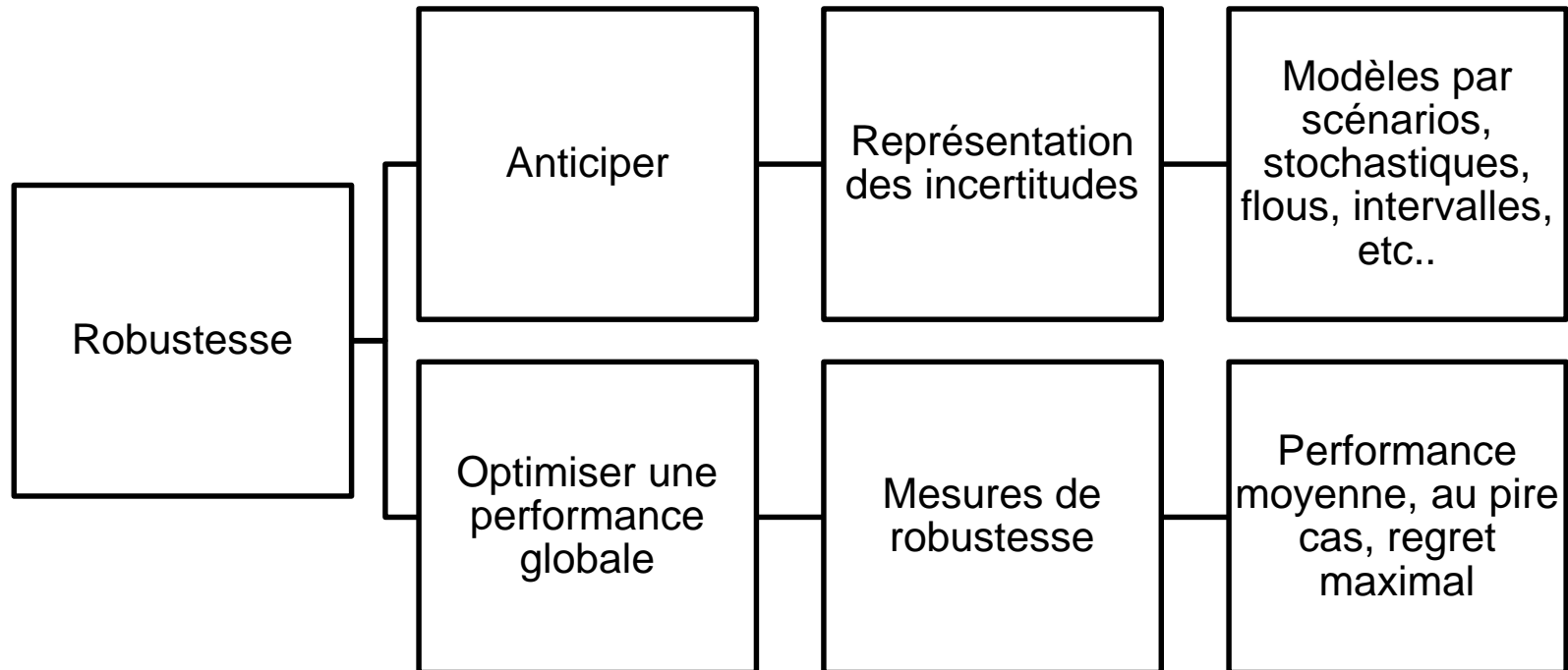
(Billaut et al. 05)

- Proactif et capable d'absorber les incertitudes sans besoin d'être ré-ordonné.

(Herroelen et Leus 05)

- Aptitude à résister à des « à peu près » ou à des « zones d'ignorances » afin de se protéger d'impacts jugés regrettables

(Roy 10)



Synthèse des définitions de la notion de robustesse en ordonnancement

- Représentation des incertitudes par des scénarios discrets ( Kouvelis et Yu 1997, Aissi 2005, Aloulou et dellacroce 2008, *etc.* )
  - Pas de loi de répartition spécifique des données incertaines
  - Prédiction et opinion des experts
- Mesures de robustesse (Kouvelis et Yu 1997, Bertsimas et Sim 2004, Billaut et al. 2005, Averbakh 2007, BenTal et al. 2009, *etc.*)
  - Performance au pire cas
  - Regret maximal
- Modèles (Kouvelis et Yu 1997, BenTal et al. 2009, Averbakh 2007, *etc.*)
  - min-max et min-max regret



Problème	Paramètre incertain	
	$p_j$	
$1    \sum C_j$	NP-difficile	(Daniel et Kouvelis 1995) (Yang and Yu 2002)
$1    \sum w_j C_j$	NP-difficile	(Aloulou et Dellacroce 2008)
$1  prec  C_{max}$	$O(n^2 S )$	
$1    \sum U_j$	NP-difficile	
<b>Machines parallèles</b>  <b><math>R_m/Split/C_{max}</math></b>	<b>Aucun résultat</b>	
$F2/permutation/ C_{max}$	NP-Difficile au sens fort	(Kasperski et al; 2012)

- ❑  $(R_m/Split/C_{max}, p_{ij} \text{ incertaines})$  non traité en littérature
- ❑ Résultats d'optimalité de la solution du scénario des durées opératoires maximales dans le cas d'une machine [Aloulou et al. 08]

$$\text{Min } C_{max} \quad (1)$$

s. c.

$$\sum_{i=1}^m \frac{t_{ij}}{p_{ij}^s} = 1$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall s \in \{1, \dots, S\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \leq C_{max}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

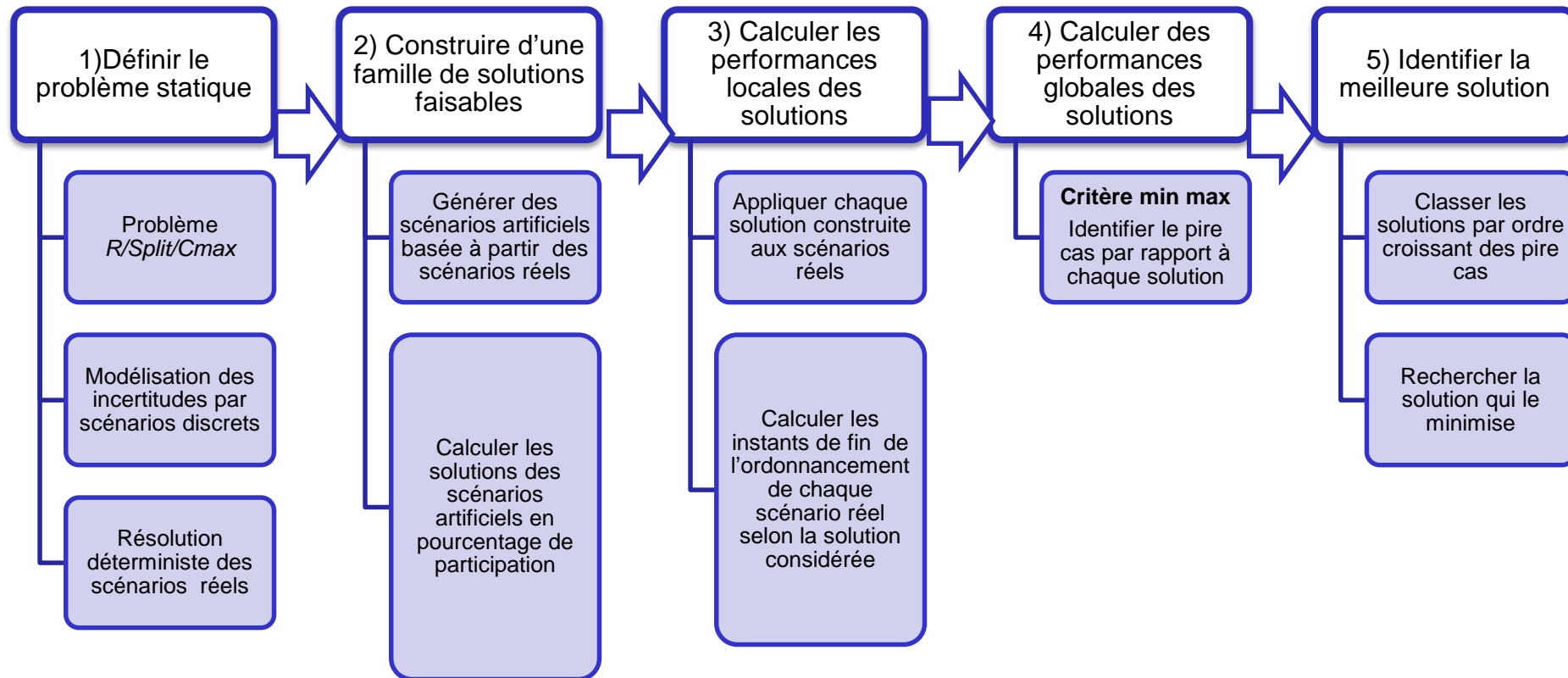
$$t_{ij} \geq 0$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

→ Pas d'ordonnancement faisable pour tous les scénarios !!

- 3 approches:
  - Solutions robustes approchées
  - Solutions robustes optimales
  - Ordonnancement flexible tolérant l'infaisabilité des contraintes.

# Approche constructive par scenarii artificiels



## 1) Définir le problème statique

- Modélisation des hypothèses par un ensemble de scénarii discrets de commandes  $C = \{(C_{lk})\}_{k \in K}$

Scénario des demandes 1 = [30,50,30,100]

Scénario des demandes 2 = [50,30,80,50]

Scénario des demandes 3 = [25,90,100,80]

- Calcul des matrices des durées opératoires  $P_{scen(k)}$  et résolution déterministe
- Résolution déterministe de chaque scénario réel

## 2) Construction d'une famille de solutions artificielles

- Construction de l'ensemble des scénarii artificiels :  
I'={scénario Max, scénario moyen, scénario médian, scénarii aléatoires, scénario min, etc...}
- Calculer les solutions artificielles correspondantes au scénarios artificiels construits  $S_{scenArtificiel}$ (: pourcentages de participation

*Scénario Max*

Scénario1 = [30,50,30,100]

Scénario2 = [50,30,80,50]

Scénario3 = [40,50,100,80]



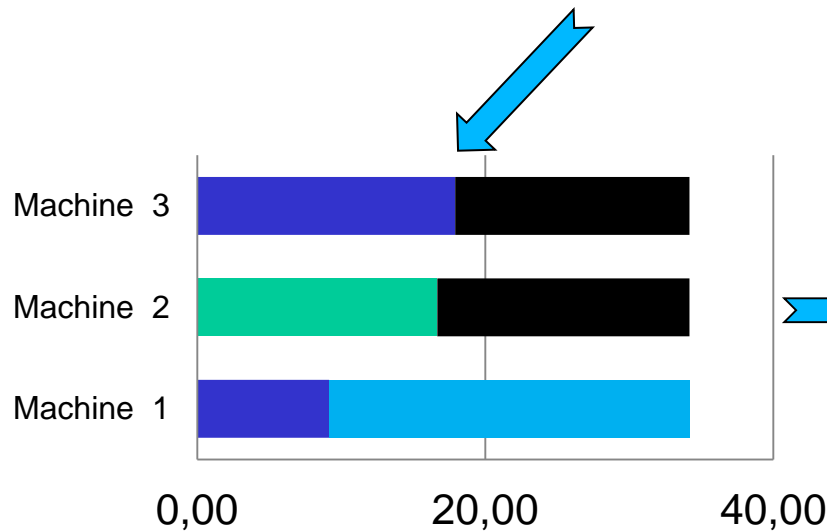
# Approche de résolution (exemple)

Scénario Max

Scénario1 = [30,50,30,100]

Scénario2 = [50,30,80,50]

Scénario3 = [40,50,100,80]



$$R(s_{Max}) = \begin{bmatrix} 0.13 & 0.21 & 0.77 & 0 \\ 0.87 & 0 & 0.23 & 0.38 \\ 0 & 0.79 & 0 & 0.62 \end{bmatrix}$$

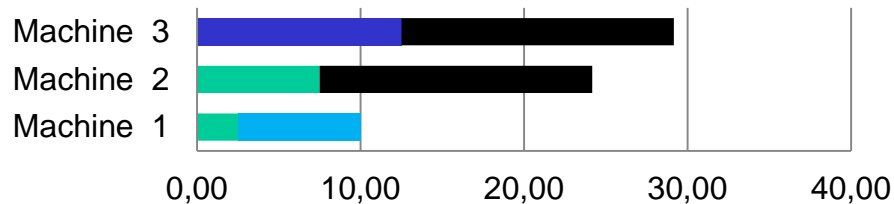
■ Job 1 ■ Job 2 ■ Job 3 ■ Job 4

*Ordonnancement et solution du scénario artificiel du pire-cas*<sup>25</sup>

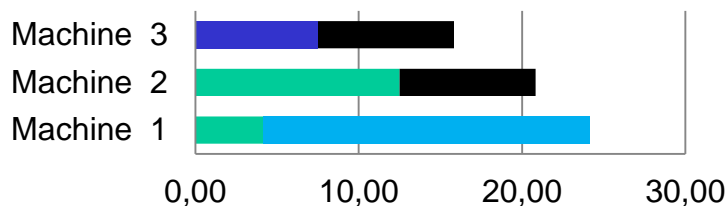
## 3) Calcul des performances locales des solutions

- Ordonnancer les scénarii réelles selon les solutions des scénarios artificielles, makespan

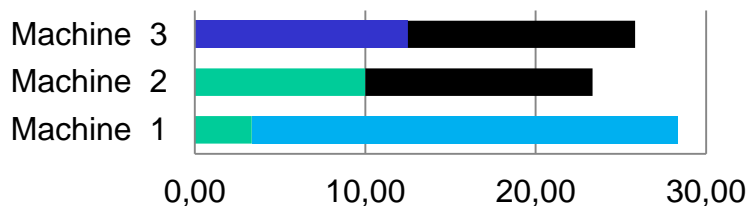
Ordonnancements des scénarios réels selon la solution artificielle  $S_{Max}$



$$C_{max}(S_{max} \text{ appliquée au scénario1}) = 29$$



$$C_{max}(S_{max} \text{ appliquée au scénario2}) = 24$$

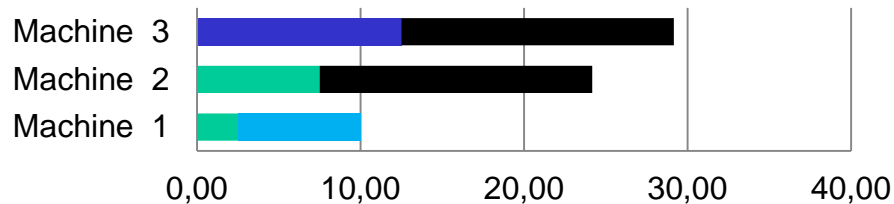


$$C_{max}(S_{max} \text{ appliquée au scénario3}) = 28$$

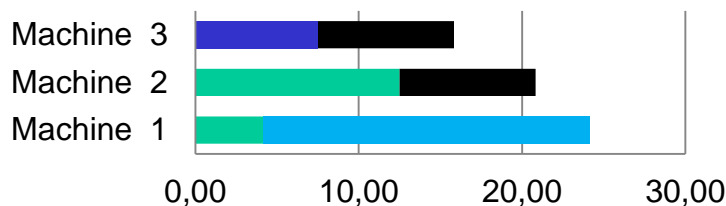
## 4) Calcul des performances globales des solutions

- Ordonnancer les scénarii réelles selon les solutions des scénarios artificielles, makespan

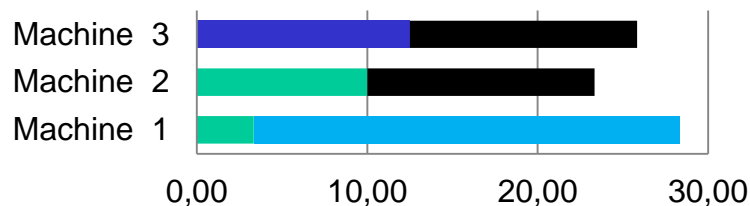
Ordonnancements des scénarios réels selon la solution artificielle  $S_{Max}$



$$C_{max}(S_{max} \text{ appliquée au scénario1}) = 29$$



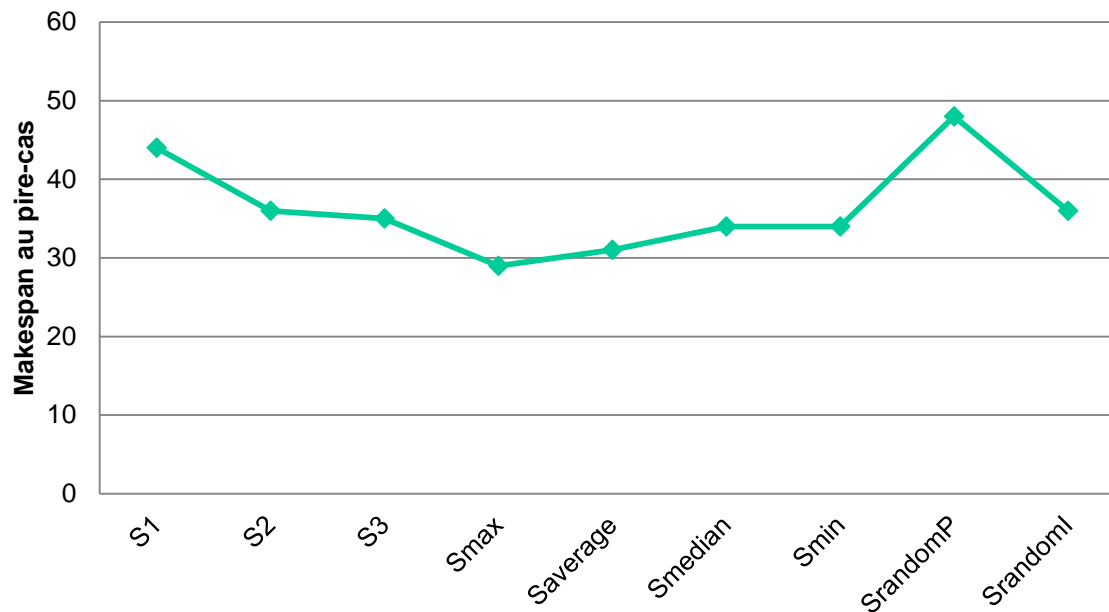
$$C_{max}(S_{max} \text{ appliquée au scénario2}) = 24$$

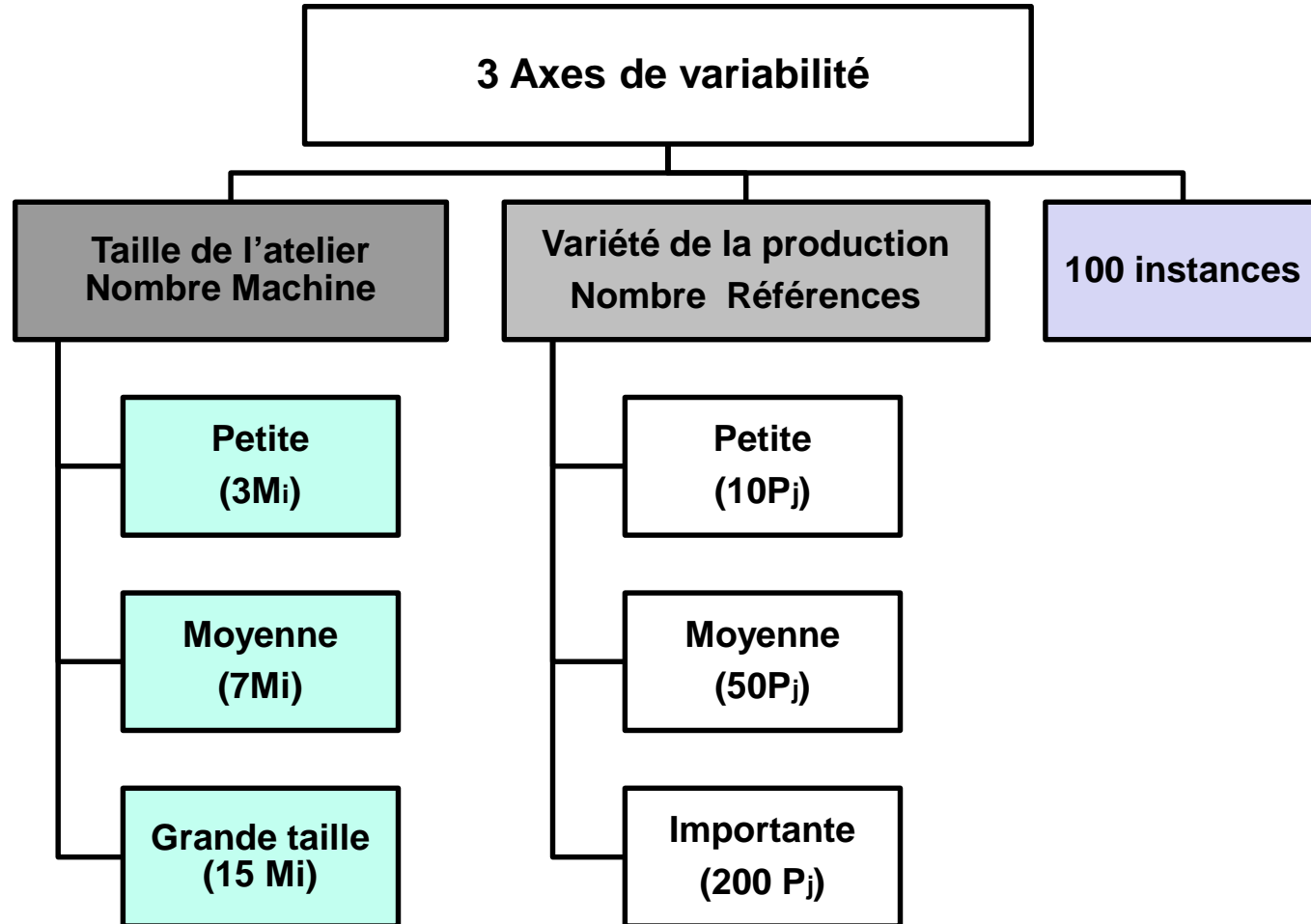


$$C_{max}(S_{max} \text{ appliquée au scénario3}) = 28$$

## 5) Mesures de robustesse des solutions

Makespans au pire-cas des solutions  
des scénarios réels et artificiels



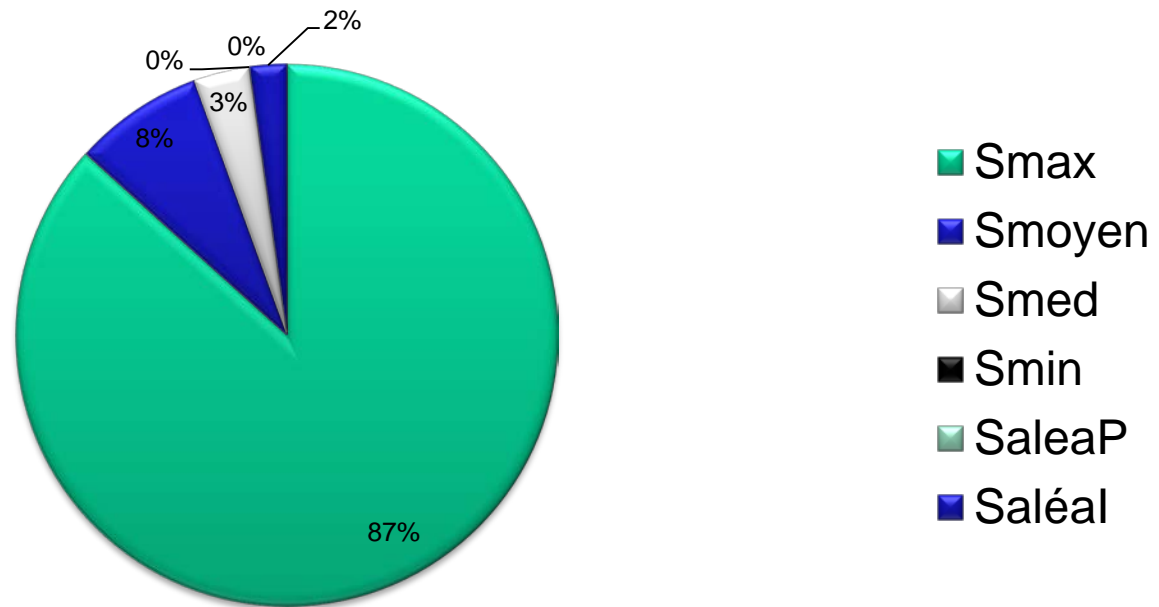


Instances	<i>S</i> Max	<i>S</i> moyen	<i>S</i> median	<i>S</i> alea	<i>S</i> autre
M3_J10	+++	+	+	-	-
M_3J_50	++	++	+	-	-
M_3J_200	+	++	+	-	-
M_7J_10	++++	-	-	-	-
M_7J_50	+++	-	-	-	-
M_10_j10	+++++	-	-	-	-

+ supérieur à 20%

- Inférieur à 5%

- $S_{Max}$  est plus robuste les autres solutions de scénarii artificiels



- Donc, son coût n'est pas le plus élevé !!

# Approche robuste exacte: affectation robuste

(Naji et al. 2016)



$$\min C_{max}$$

s. c.

$$\sum_{i=1}^m \frac{t_{ij}}{p_{ij}^s} = 1$$

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall s \in \{1, \dots, S\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n t_{ij} \leq C_{max}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

$$t_{ij} \geq 0$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

→ Incertitudes en contraintes d'égalités

→ Changement de variables

$$\min C_{max} \quad (1)$$

s. c.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \leq C_{max} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

→ La variable de décision est la matrice des affectations  $x_{ij} = \left(\frac{t_{ij}}{p_{ij}}\right)$

→ L'incertitude est déplacée en contraintes d'inégalité: acceptable

$$\min \max_{s \in S} C_{max}^s$$

s. c.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}^s x_{ij} \leq C_{max}^s \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

→ La variable de décision est la matrice des affectations robustes  $x_{ij}$

$$\min C_{worst-case}$$

s. c.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$C_{max}^s \leq C_{worst-case} \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}^s x_{ij} \leq C_{max}^s \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall s \in \{1, \dots, S\}$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

→ La variable de décision est la matrice des affectations robustes  $x_{ij}$

$$\min C_{worst-case} \quad (1)$$

s. c.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij}^s x_{ij} \leq C_{worst-case} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall s \in \{1, \dots, S\} \quad (3)$$

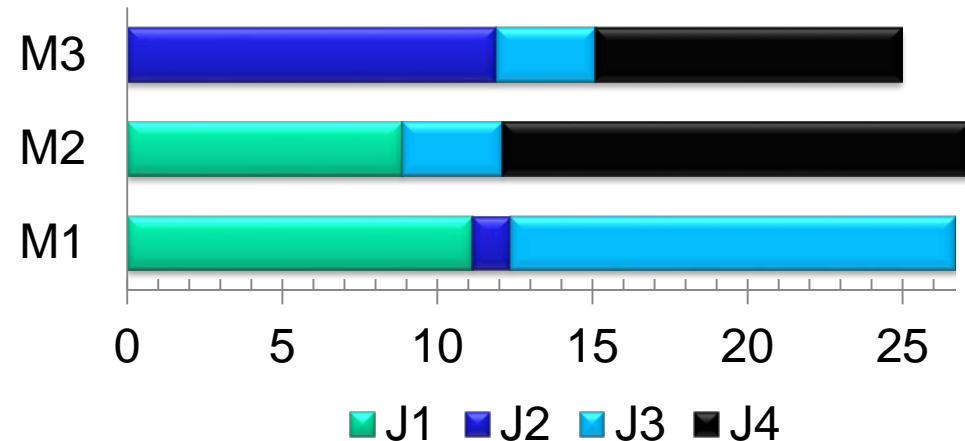
$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

→ La variable de décision est la matrice des affectations robustes

→  $C_{worst-case}$  est le makespan du pire cas

- Résolution robuste du  $Rm/Split/C_{max}$ 
  1. Considérer un ensemble de scenarii (6 dans l'exemple)
  2. Minimiser le makespan au pire cas

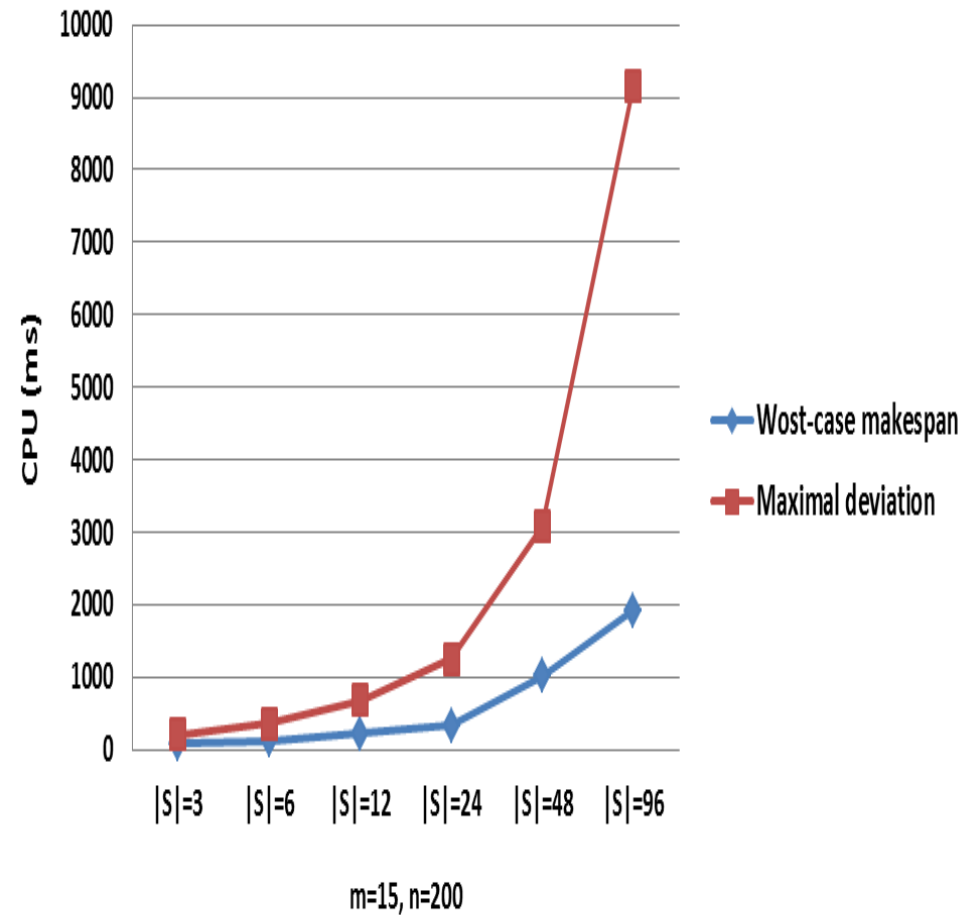
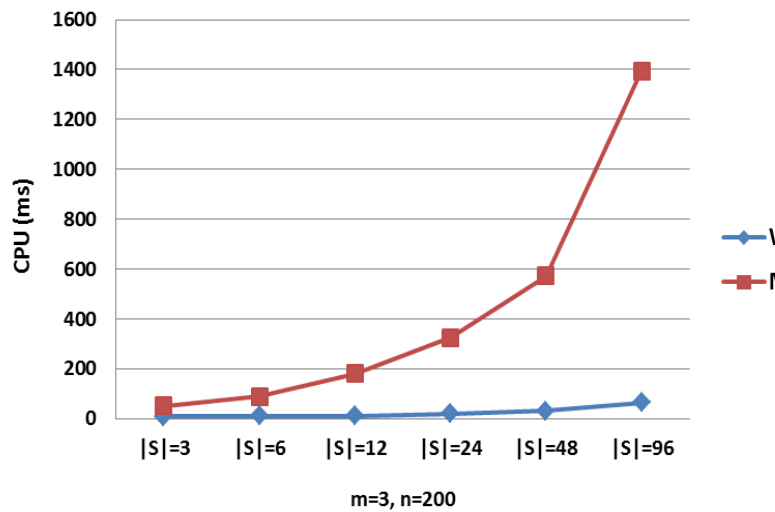
$$R_{robuste}(6s) = \begin{bmatrix} 0 & 0.95 & 0.17 & 0.56 \\ 0.44 & 0 & 0.12 & 0.44 \\ 0.56 & 0.05 & 0.71 & 0 \end{bmatrix}$$

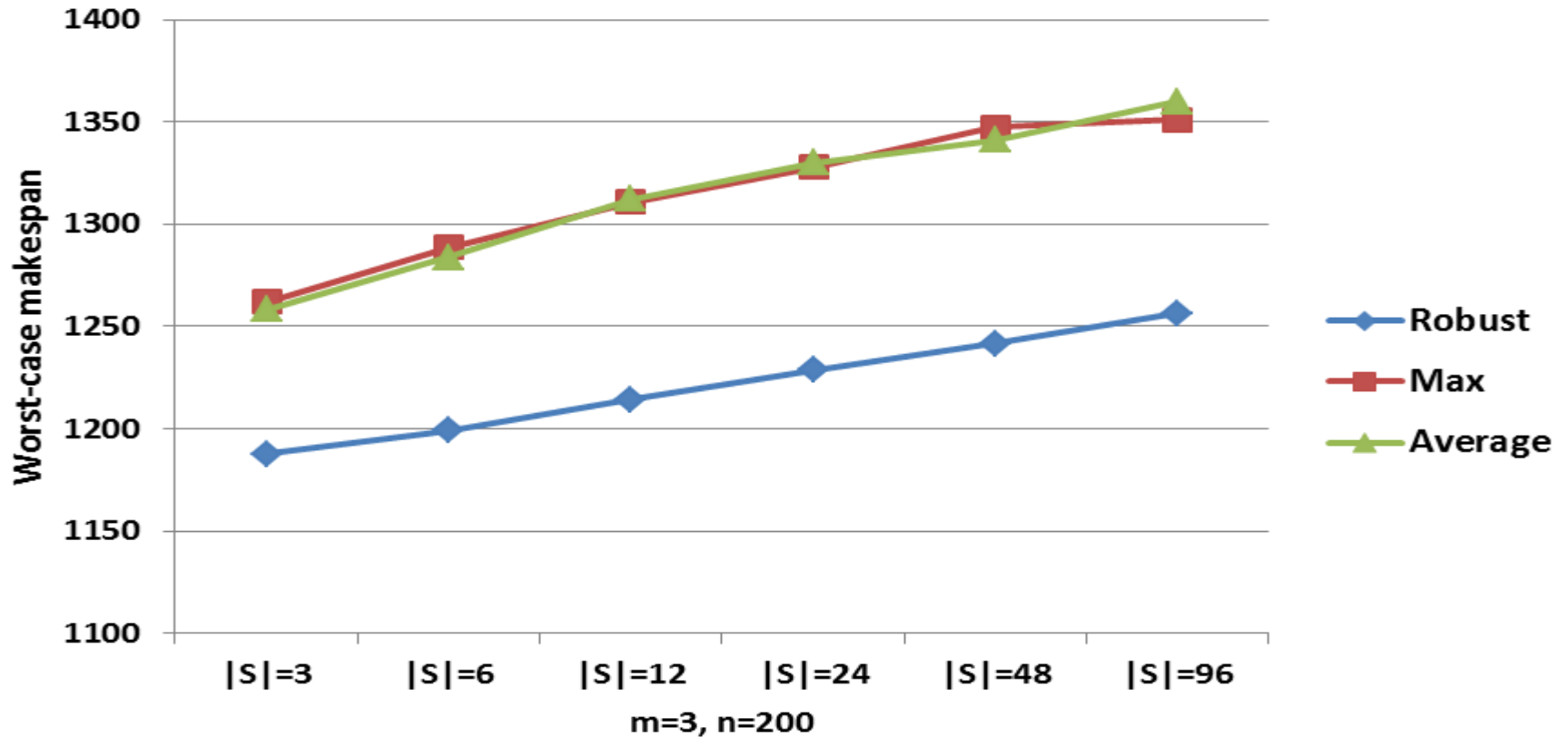


Ordonnancement au pire-cas selon la solution robuste

→ Amélioration de la performance

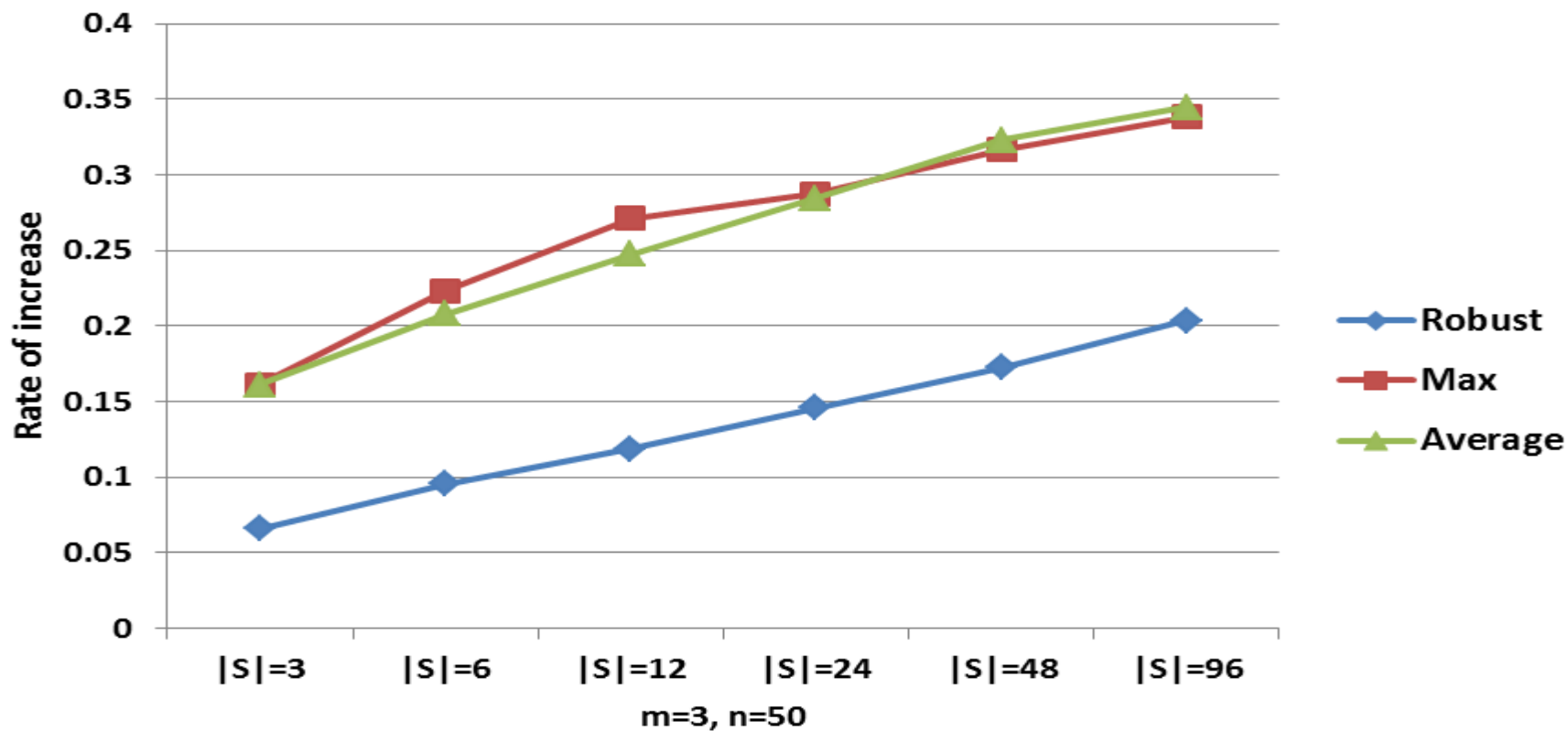
$$C_{max}^{w*} = 27.16 \ll 29$$





Comparaison des coûts des solutions selon le makespan au pire cas





Taux d'accroissement des solutions par rapport à la moyenne des makespans optimaux des scénarios

Problème	Paramètre incertain
	$p_j$
<b>Machines parallèles</b> <i>R/Split/C<sub>max</sub></i>	Polynomial
<i>Q/Split/C<sub>max</sub></i> <i>P/Split/C<sub>max</sub></i>	$O(n S )$

- $Rm/Split/ C_{max}$  avec durées opératoires incertaines
- Représentation par scénarii discrets
- Objectif robustesse: 3 approches différentes
- Résultats comparatifs des coûts de différentes solutions

- Evaluer la stabilité des solutions robustes en présence d'un nouveau scénario
- Considérer le problème préemptif
- Prendre en compte les contraintes du séquençement

Merci pour votre attention